PART2　条件付き確率

2 ［1］ 白玉 5 個と赤玉 3 個が入っている袋から，1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す。取り出した 1 番目の玉が赤であるとき，3 番目の玉が白である確率を求めよ。

［2］ A と B の 2 つの袋があって，A には白玉 4 個と赤玉 6 個，B には白玉 5 個と赤玉 5 個が入っている。A から 1 個取り出して B に入れ, よくかきまぜてから 1 個取り出して A に入れるとき，次の確率を求めよ。

(1) A の白玉の数が増加する確率

(2) A の白玉の数が減少する確率

(3) A の白玉の数が変わらない確率

Point Pickup

［1］ 事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率(条件付き確率)は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 A が起こったあとの状態が明確なときは，その状態から事象 B が起こる場合を考え，$P_A(B)$ を求めるとよい。

［2］ 確率の乗法定理　$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$　を用いる。

第 5 講　PART2　確認問題

1　黒玉６個と白玉４個が入っている箱から，１個ずつ順に３個の玉を取り出す。取り出した１番目の玉が黒であるとき，３番目の玉も黒である確率を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

2　ＡとＢの２つの箱があって，Ａには黒玉４個と白玉８個，Ｂには黒玉３個と白玉２個が入っている。Ａから１個取り出してＢに入れ，よくかきまぜた後，Ｂから１個取り出してＡに入れるとき，次の確率を求めよ。

⑴　Ａの黒玉の数が増加する確率

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

⑵　Ａの黒玉の数が減少する確率

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

⑶　Ａの黒玉の数が変わらない確率

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

PART2　条件付き確率

2　[1]　白玉5個と赤玉3個が入っている袋から，1個ずつ順に3個の玉を取り出す。取り出した1番目の玉が赤であるとき，3番目の玉が白である確率を求めよ。

[2]　AとBの2つの袋があって，Aには白玉4個と赤玉6個，Bには白玉5個と赤玉5個が入っている。Aから1個取り出してBに入れ，よくかきまぜてから1個取り出してAに入れるとき，次の確率を求めよ。

(1)　Aの白玉の数が増加する確率

(2)　Aの白玉の数が減少する確率

(3)　Aの白玉の数が変わらない確率

[1]　1番目に取り出した玉が赤である事象を A，3番目に取り出した玉が白である事象を B とする。

$$P(A)=\frac{3}{8}$$

$A\cap B$ は，1番目から順に赤玉，赤玉，白玉，または赤玉，白玉，白玉と出る場合であるから

$$P(A\cap B)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{15}{56}$$

よって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{15}{56}\div\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{7}$

（別解）　1番目に赤玉を取り出したとき，残りの玉は白玉5個，赤玉2個である。ここから次の2回で順に赤玉，白玉，または白玉，白玉が出ればよい。

よって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{7}$

[2]　(1)　Aの白玉の数が増加するのは，Aから赤玉を取り出し，Bから白玉を取り出すときである。

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{3}{11}$

⑵　Ａの白玉の数が減少するのは，Ａから白玉を取り出し，Ｂから赤玉を取り出すときである。

よって，求める確率は　$\frac{4}{10}\times\frac{5}{11}=\frac{2}{11}$

⑶　Ａの白玉の数が変わらないのは，Ａから取り出した玉の色とＢから取り出した玉の色が同じときである。

よって，求める確率は　$\frac{6}{10}\times\frac{6}{11}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{11}=\frac{6}{11}$

(別解)

Ａの白玉の数が変わらないのは，⑴⑵以外のときである。

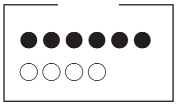
よって，求める確率は　$1-\left(\frac{3}{11}+\frac{2}{11}\right)=\frac{6}{11}$

第 5 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イ：9

[解説]

1番目に取り出した玉が黒である事象を A，3番目に取り出した玉が黒である事象を B とする。



事象 A が起こる確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{6}{6+4}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$A\cap B$ は，1番目から順に黒，黒，黒，または，黒，白，黒と出る場合であるから

$$P(A\cap B)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$$

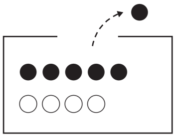
$$=\frac{2\cdot6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{3}$$

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}\div\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$ [A]

(別解)

1番目に黒玉を取り出したとき，残りの玉は黒玉5個，白玉4個である。 [B]



ここから，次の2回で順に黒，黒，または，白，黒が出ればよい。

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

[A]　条件付き確率
事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率（条件付き確率）$P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

[B]　事象 A が起こったあとの状態が明確なときは，その状態から事象 B が起こる場合を考え，$P_A(B)$ を求めるとよい。

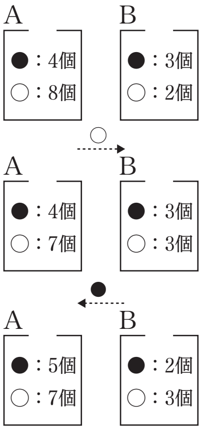
2　[正解] ウ：1，エ：3，オ：1，カ：9，キ：5，ク：9

[解説]

(1)　A の黒玉の数が増加するのは，A から白玉を取り出し，B から黒玉を取り出すときである。

よって，求める確率は

$$\frac{8}{12}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$ [C]

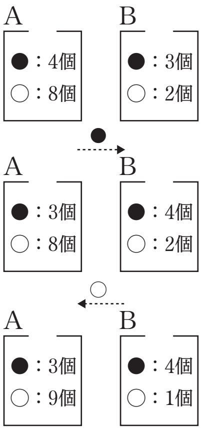


> [C]　確率の乗法定理
> $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

(2)　A の黒玉の数が減少するのは，A から黒玉を取り出し，B から白玉を取り出すときである。

よって，求める確率は

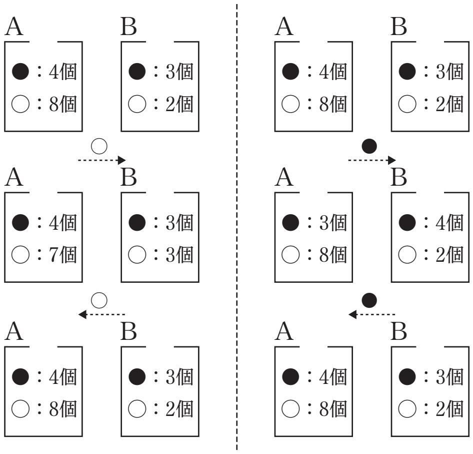
$$\frac{4}{12}\times\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$ [C]



(3)　A の黒玉の数が変わらないのは，A から取り出した玉の色と B から取り出した玉の色が同じときである。

よって，求める確率は

$$\frac{8}{12}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{12}\times\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$ [C]



（別解）

Ａの黒玉の数が変わらないのは，(1)，(2)以外のときである。

よって，求める確率は　$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{9}$